

ارائه یک الگوریتم فرا ابتکاری^۱ جهت انتخاب سبد سهام با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد صحیح

دکتر محمدتقی تقوی فرد^۲

طاها منصوری^۳

دکتر محسن خوش‌طینت^۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۶/۸/۷

تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۶/۲۹

چکیده

تحقیق حاضر، مساله انتخاب سبد سهام مارکوویتز را در نظر گرفته و در پی رهگیری مرز کارای مورد نظر مدل مارکوویتز تحت شرایط وجود محدودیت‌های عدد صحیح تعداد سهام می‌باشد. بدین منظور به‌وسیله الگوریتم ژنتیک پیشنهادی، مساله مقید را با استفاده از داده‌های واقعی شرکتهای داخلی و نیز خارجی حل نموده و با مساله نامقید مارکوویتز مقایسه نموده‌ایم. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که الگوریتم پیشنهادی در هر دو نمونه توانسته است در فضای جستجوی موجه، اقدام به بهینه‌سازی نموده و در نتیجه مساله سبد سهام مقید را به خوبی حل نماید.

طبقه‌بندی JEL: C، C6، C61

واژگان کلیدی: مدل میانگین واریانس مارکوویتز، مرز کارا، برنامه‌ریزی کوآدراتیک، محدودیت‌های عدد صحیح، الگوریتم ژنتیک.

1. Meta heuristic

۲. استادیار گروه مدیریت صنعتی و فناوری اطلاعات، دانشگاه علامه طباطبائی

email: dr_taghavifard@yahoo.com

۳. کارشناس ارشد فناوری اطلاعات، دانشگاه علامه طباطبائی

email: taha.msi@gmail.com

۴. استادیار گروه حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی

email: khoshtinatnik@yahoo.com

۱- مقدمه

در اوائل دهه ۱۹۵۰ هری مارکوویتز مدلی را به منظور پیش‌بینی ارزش سهام (سبد سهام) بر اساس میانگین به عنوان بازده و واریانس به عنوان شاخص ریسک بنا نهاد (Markowitz, 1952) مدل مارکوویتز بر اساس شاخصه‌های بازده منتظره و ریسک اوراق بهادار و متنوع‌سازی سبد اوراق بهادار بنا نهاده شد که در اصل یک چارچوب نظری برای تحلیل گزینه‌های ریسک و بازده است. بر اساس نظریه وی، سبد سرمایه‌گذاری کارا سببی است که در سطحی معین از ریسک، دارای بیشترین بازده یا دارای کمترین ریسک به ازای یک سطح معین از بازده باشد. مارکوویتز برای توسعه مدل خویش برخی مفروضات پایه‌ای را در نظر گرفت. بر اساس مفروضات وی، سرمایه‌گذاران معمولاً: ۱- نسبت به بازده علاقه‌مند و نسبت به ریسک بی‌علاقه‌اند، ۲- در تصمیم‌گیری رفتاری عقلایی دارند و ۳- بر مبنای بیشینه‌کردن مطلوبیت منتظره خویش اقدام می‌نمایند. بنابراین مطلوبیت سرمایه‌گذار تابع ریسک و بازده انتظاری اوست که این دو، پارامترهای عمده تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری می‌باشند (مارکوویتز، ۱۹۵۹).

۲- تعیین مرز کارا^۱

روش میانگین واریانس استاندارد مارکوویتز برای انتخاب سبد سهام اقدام به رهگیری یک مرز کارا می‌نماید. این مرز، منحنی پیوسته‌ای است که مبادله^۲ میان بازده و ریسک سبد سهام را نشان داده و به راحتی توسط برنامه‌ریزی کوآدراتیک^۳ محاسبه می‌گردد. برنامه‌ریزی کوآدراتیک با وجود محدودیت‌های خطی، به بهینه‌سازی غیرخطی رابطه دو متغیر می‌پردازد. به طور خلاصه مدل بهینه‌سازی مارکوویتز به صورت فرمول زیر ارائه می‌شود. (Markowitz, 1952 & 1959; Rudd & Rosenberg, 1979; Dahl & et al., 1993; Elton & Gruber, 1995):

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i = R^* \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (۴)$$

که در آن σ_{ij} کوواریانس سهام i و j ، w_i و w_j وزن سهام i و j ، μ_i میانگین بازده سهام i ، و R^* سطح خاصی از بازده را نشان می‌دهد. با حل مدل فوق (معادلات ۱ تا ۴) از طریق برنامه‌ریزی کوآدراتیک، با استفاده از ارزش‌های مختلف R^* می‌توان مرز کارای پیوسته‌ای را مشخص نمود که بهترین ترکیب ریسک و بازده را در اختیار قرار می‌دهد.

در برنامه‌ریزی کوآدراتیک مدل میانگین واریانس مارکوویتز، متغیرهای تصمیم وزن‌های سهام بوده و هدف، یافتن مقدار بهینه این وزن‌ها است. لازم به ذکر است نقطه قوت برنامه‌ریزی کوآدراتیک از یک سو، در دسترس بودن برنامه‌های نرم‌افزاری حل‌کننده آن است که به راحتی می‌توانند نسبت به حل این مدل اقدام نمایند و از سوی دیگر، این مدل به جواب بهینه اصلی مساله دست پیدا می‌کند؛ در حالی که نقطه ضعف اصلی این روش، ناتوانی در بهینه‌سازی مساله انتخاب سبد سهام مقید تحت محدودیت‌های عدد صحیح است. یعنی محدودیت‌هایی که تعیین‌کننده تعداد سهام مورد استفاده در سبد سهام است (تعداد سهامی که سرمایه‌گذار مایل است در سبد سهام مورد نظرش قرار داشته و ترکیب بهینه آنها را به دست آورد).

در تصمیم‌گیری‌های واقعی مالی، سرمایه‌گذار اغلب به دلایل مختلف، نیازمند تعیین دقیق تعداد دارایی‌ها در سبد سرمایه‌گذاری خود می‌باشد. در چنین شرایطی است که وارد نمودن محدودیت عدد صحیح انتخاب تعداد سهام به مدل، آن را به دنیای واقعی نزدیک‌تر ساخته و حل آن، تصمیمات مفیدتر و کاربردی‌تری را پیش روی سرمایه‌گذار قرار می‌دهد.

اما از سوی دیگر، ترکیب برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی و برنامه‌ریزی کوآدراتیک، یک مساله سخت برای حل^۱ را پدید می‌آورد که الگوریتم مشخص و کارایی برای حل آن ارائه نشده است (Fernandez & Gomez, 2007).

فرمول محدودیت عدد صحیح مورد نظر، به صورت معادله شماره ۵ است که به مدل قبلی (معادلات ۱ تا ۴) اضافه می‌شود.

$$\sum_{i=1}^n Z_i = K \quad (۵)$$

بر اساس محدودیت شماره ۵، اگر در دارایی i سرمایه‌گذاری شود، مقدار Z_i برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد. پارامتر K تعداد سهامی است که سرمایه‌گذار مایل به

سرمایه‌گذاری در آن است. بنابراین محدودیت ۵ سرمایه‌گذاری در K سهم از n سهم را تضمین می‌نماید.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، ورود این محدودیت، فضای پیوسته جستجو را به یک فضای گسسته و غیرخطی بدل می‌نماید. این امر موجب پدید آمدن ترکیبی پیچیده از برنامه‌ریزی کوآدراتیک و عدد صحیح غیرخطی شده که یک مساله سخت برای حل است. از این رو تحقیقات صورت گرفته در این زمینه نیز معدود می‌باشند.

۳- پیشینه تحقیق

عمده تحقیقات پیشین و کوششهای انجام‌شده در این خصوص در دو طبقه قرار می‌گیرند: الف) محققان سعی داشته‌اند با استفاده از الگوریتم‌های موجود، نسبت به حل مدل مقید اقدام نمایند: (Hensen & et al., 1993; Borchers & Mitchell, 1994 & 1997; Floudas, 1995). ب) تحقیقاتی که در آن محققان تلاش داشته‌اند معیار ریسک مورد نظر مارکوویتز (جمع ضرایب وزنی کوواریانس‌ها) را با معیار ریسک خطی عوض کنند.

در خصوص گروه الف می‌توان به تحقیقات بینس‌تاک اشاره نمود. وی با استفاده از مدل کوآدراتیک مارکوویتز و با استفاده از برشهایی در فضا نسبت به استخراج شاخصه‌های مختلف اقدام نمود. روش حل انشعاب و تحدید^۱ او تا ۳۸۹۷ دارایی مورد آزمون قرار گرفته است (Bienstock; 1995 & 1996).

در گروه ب نیز اسپرانزا معیار ریسک سبد سهام را به معیار خطی MAD تبدیل و با استفاده از ترکیب برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح و روشهای ابتکاری، اقدام به حل مساله نمود. وی نتایج را برای ۲۰ دارایی مورد آزمون قرار داد (Speranza, 1996). اسپرانزا با استفاده از شاخص ریسک قبلی خود به همراه مانسینی، از سه الگوریتم ابتکاری دیگر برای حل مساله استفاده کرد. آنها روش خود را برای مساله‌ای با ابعاد ۲۴۴ و ۲۷۷ دارایی آزمودند (Mansini & Speranza, 1997). کمی بعد، دو محقق فوق، با همکاری کلرر روش ابتکاری دیگری ارائه داده و مساله مقید را برای ۲۴۴ دارایی مورد آزمون قرار دادند (Kellerer, Mansini & speranza, 1997). فرناندز و گومز نیز در مطالعات اخیر خود کارایی استفاده از شبکه‌های عصبی هاپفیلد را در حل مساله مارکوویتز مقید گزارش نموده‌اند (Fernandez & Gomez, 2007).

۴- الگوریتم ژنتیک^۱

الگوریتم ژنتیک به وسیله جان هالند در سالهای دهه ۱۹۶۰ ابداع شد و به وسیله او و همکارانش در دانشگاه میشیگان در سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ توسعه یافت و نهایتاً در سال ۱۹۷۵ به عنوان الگوریتم ژنتیک ارائه گردید (Holland, 1975). این الگوریتم یک روش جستجوگرانه فرابتکاری است که از تئوری تکامل طبیعی و تنازع بقا برای حل مساله استفاده می کند. بر اساس مفروضات این روش، جوابهای خوب، جوابهای بد را از بین برده و جایگزین آنها می شوند. امروزه این الگوریتم به دلیل خاصیت اکتشافی خود، برای حل مسائل پیچیده مورد استفاده قرار می گیرد (Grupe & etal., 2004).

الگوریتم ژنتیک با یک رشته جواب اولیه، به نام کروموزوم^۲ و مجموعه آنها با نام جمعیت^۳ آغاز می گردد. در هر رشته کروموزوم، مجموعه ای از ژن^۴ها وجود دارند که هر کدام بیانگر ارزش یک متغیر یا صفت خاصه است (Mitchel, 1999).

بر روی کروموزومها معمولاً سه عملگر انتخاب^۵، تقاطع^۶ و جهش^۷ اعمال می شود تا نسل جدید جامعه متولد گردد. این نسل تکامل یافته نسل قبلی، در جهت دستیابی به جوابهای بهتر - یا به اصطلاح برازنده تر - است.

در خصوص به کارگیری الگوریتم ژنتیک در انتخاب سبد سهام هم مطالعات فراوانی وجود دارد. آرنون و همکارانش یک الگوریتم ژنتیک برای مساله پورتفولیوی نامقید ارائه دادند، اما معیار ریسک مورد استفاده آنها نیم واریانس بود. نتایج محاسبات برای ۱۵ دارایی محاسبه گردید (Arnone & etal. 1993). لوراشی و همکارانش نیز برای انتخاب سبد سهام نامقید، با استفاده از مدلهای جزیره ای (مدلهای مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای استفاده در جوامع جدا از یکدیگر که در آنها، جوابهای برازنده تر در میان جوامع کوچ می نمایند) اقدام به حل مدل نمودند. نتایج در دو مساله با ۵۳۰ و ۳۵ دارایی مورد مقایسه قرار گرفت (Loraschi & etal., 1995).

در مطالعات گروه اوه، از الگوریتم ژنتیک برای بهینه سازی سبد سهام استفاده شده است. آنها نیز مانند تحقیقات قبلی از مدل نامقید استفاده کرده اند (Oh & etal., 2005).

1. Genetic Algorithm

2. Chromosome

3. Population

4. Gene

5. Selection

6. Crossover

7. Mutation

۵- مدل پیشنهادی برای حل مساله سبد سهام مقید

مدل پیشنهادی تحقیق حاضر جهت حل مساله سبد سهام مقید، استفاده از یک الگوریتم ژنتیک خاص است. بر اساس این مدل پیشنهادی مراحل حل مساله به صورت زیر می باشد:

الف) فرموله نمودن مساله: جهت حل مساله انتخاب سبد سهام مقید توسط مدل پیشنهادی تحقیق، ابتدا مساله به شکل زیر فرموله می شود (Fernandez & Gomez, 2006).

$$\text{Minimize } \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v_i v_j \sigma_{ij} \right] + (1-\lambda) \left[- \sum_{i=1}^N v_i \mu_i \right] \quad (۶)$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=1}^n v_i = 1 \quad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = K \quad (۸)$$

$$\varepsilon_i Z_i \leq v_i \leq \delta_i Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۹)$$

$$Z_i \in \{0, 1\} \quad (۱۰)$$

که در آن ε_i حد پایین سرمایه گذاری در سهام i و δ_i حد بالای سرمایه گذاری در سهام i می باشد.

در مدل ریاضی فوق، λ یک پارامتر وزن دهی است که مقدار آن در فاصله $[0, 1]$ تغییر می کند. با تغییر مقدار λ همانند تغییر در مقدار بازده مورد انتظار در معادله ۶، می توان مرز کارا را با استفاده از برنامه ریزی کوآدراتیک رهگیری نمود؛ به طوری که با قراردادن $\lambda = 0$ تمامی وزن، به بازده تخصیص داده می شود و سبد سهام دارای بیشترین بازده، انتخاب می شود و با در نظر گرفتن $\lambda = 1$ کل مقدار ضریب وزنی به ریسک داده شده و سبد سهام دارای کمترین ریسک، انتخاب می شود. در نهایت در فاصله $0 < \lambda < 1$ سبدهایی با داشتن رابطه مبادله بین ریسک و بازده، بهینه می گردند. یعنی با افزوده شدن مقدار ضریب λ ، هدف کاهش ریسک اهمیت بیشتری یافته و در عین حال چون مقدار $(1-\lambda)$ ، کاهش می یابد، وزن هدف بیشینه نمودن بازده کمتر خواهد شد.

تبدیل مساله به فرم معادلات ۶ تا ۱۰ این امکان را در اختیار می گذارد تا بتوان آن را با استفاده از مدل ارائه شده در این تحقیق حل نمود. لازم به ذکر است که مرز کارای ناشی از مساله انتخاب سبد سهام مقید ممکن است پیوسته نباشد زیرا برخی از ترکیبها غیرموجه خواهند بود (Smith, 1999; Fernandez & Gomez, 2006).

جهت تشکیل تابع برازش، از تابع برازش الگوریتم ژنتیک پیشنهادی (معادله شماره ۶) به ازای مقادیر مختلف λ در فاصله $[0, 1]$ استفاده شده و برازندگی بیشتر با کمینه ساختن مقدار معادله ۶

حاصل می‌گردد. از سوی دیگر مساله با استفاده از اعداد حقیقی کد می‌گردد. یعنی در هر ژن، اعداد حقیقی (R) قرار گرفته و ژن‌ها به صورت باینری نمایش داده نمی‌شوند. البته در این خصوص در بخش بعدی توضیحات بیشتری داده می‌شود.

ب) تعیین ساختار ژن‌ها و کروموزوم‌ها: مهمترین نکته در مدل پیشنهادی تعیین نوع ساختار ژن‌ها و کروموزوم‌ها است به شکلی که هر کروموزوم بیانگر یک جواب بالقوه و موجه باشد. برای حل مساله مقید فوق هر کروموزوم از دو بخش تشکیل می‌شود: بخش اول یعنی از ژن x_1, \dots, x_k با استفاده از شماره سهام (اعداد طبیعی)، نوع سهام مورد نظر برای سرمایه‌گذاری را تعیین می‌نماید. طول آن نیز (K) بیانگر تعداد سهام مورد نظر برای سرمایه‌گذاری است که تأمین‌کننده محدودیت شماره ۸ است و بخش دوم که تعداد ژن‌های آن دقیقاً برابر بخش اول می‌باشد؛ یعنی m_1, \dots, m_k نشان‌دهنده وزن سهم‌های موجود در بخش اول است ($0 \leq m_k \leq 1$).

شکل ۱. کروموزوم و ژن‌های پیشنهادی برای حل مساله

x_1	x_2	x_3	x_4	x_k	m_1	m_2	m_3	m_4	m_k
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

با تشکیل ساختار کروموزوم‌ها به صورت شکل ۱، محدودیت شماره ۸ کاملاً تأمین خواهد شد.

ج) اعمال عملگرها:

۱- عملگر انتخاب: عملگر انتخاب مورد استفاده در مدل پیشنهادی، انتخاب رقابتی^۱ است (Goldberg & Deb, 1991). یعنی به تعداد اعضای جامعه دو والد انتخاب می‌گردند. البته لازم به ذکر است که از دیگر روشهای انتخاب نیز می‌توان استفاده نمود.

۲- عملگر تقاطع: عملگر تقاطع مورد استفاده در مدل پیشنهادی، تقاطع یکنواخت^۲ است. در این روش از دو والد، یک فرزند متولد می‌شود. برای هر ژن فرزند، به طور تصادفی یکی از ژن‌های والدین انتخاب می‌گردد. مدل ارائه شده در الگوریتم ژنتیک پیشنهادی به راحتی می‌تواند از عملگر تقاطع فوق بر روی ژن‌های قسمت وزن‌ها استفاده نماید؛ اما در قسمت شماره سهامها یا همان قسمت اول کروموزوم‌ها باید شرط عدم تکراری بودن شماره‌ها مورد آزمون قرار گرفته و در صورتی که ژن یا ژن‌هایی در فرزندان به وسیله والدین با توجه به شرط عدم تکراری بودن پر نشود، از یک سهم تصادفی که در فرزند وجود ندارد برای پر نمودن آن ژن استفاده نمود.

۳- عملگر جهش: همان‌طور که ذکر گردید کروموزوم‌های مورد استفاده از دو بخش تشکیل می‌شوند: یکی بخش شماره سهم و دوم بخش وزن سهم در سبد سهام. عملگر جهش با استفاده از

یک نرخ احتمالی بر روی ژن‌های بخش وزن‌ها به این صورت اعمال می‌گردد که برای هر ژن، عدد تصادفی r به صورتی که: $r \in \{1, 2, 3\}$ باشد تولید می‌گردد. اگر $r = 1$ باشد مقدار ژن مربوطه در $Rand + 1$ ضرب می‌گردد؛ اگر $r = 2$ باشد مقدار ژن در $Rand - 1$ ضرب می‌گردد و در نهایت اگر $r = 3$ باشد تغییری در مقدار ژن داده نمی‌شود ($0 < Rand < 1$).

د) تأمین محدودیت‌ها: همان‌گونه که اشاره گردید محدودیت شماره ۸ با توجه به ساختار خاص کروموزوم‌ها تأمین می‌شود. جهت تأمین محدودیت شماره ۷ و ۹ یعنی محدودیت‌های جمع وزن‌ها برابر ۱ و حد بالا و پایین بعد از هر گام در الگوریتم و پس از اعمال هر عملگر به صورت زیر عمل می‌شود:

مجموع حدود پایین تمام سهمهای عضو سبد سهام، محاسبه و مجموعه اشغال شده (A) نامیده می‌شود. سپس متمم آن عدد محاسبه و عدد آزاد نامیده می‌شود ($B = 1 - A$). مجموع نسبت‌های سهمهای موجود در سبد سهام محاسبه ($L = \sum_{i \in k} m_i$) و نهایتاً وزن‌های نرمال شده به صورت

فرمول شماره ۱۱ محاسبه می‌گردند (v_i):

$$v_i = \varepsilon_i + \frac{m_i B}{L} \quad (11)$$

فرمول شماره ۱۱ محدودیت شماره ۷ و حد پایین محدودیت شماره ۹ را تأمین می‌نماید. برای تأمین محدودیت حد بالا به صورت زیر عمل می‌شود:

مجموع تمام وزن‌هایی که حد بالایی را تأمین نمی‌کنند محاسبه و C نامیده می‌شود. مجموع حدهای پایین تمام سهمهایی که حد بالا را تأمین نمی‌نمایند محاسبه شده و D نامیده می‌شود.

مجموع حدهای بالای سهمهایی که حد بالا را تأمین می‌نمایند محاسبه شده و E نامیده می‌شود.

F به صورت فرمول $F = 1 - (D + E)$ محاسبه شده و در نهایت:

اگر وزن، حد بالا را تأمین نکرده باشد آنگاه از فرمول شماره ۱۲ به صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$v_i = \varepsilon_i + \frac{m_i F}{C} \quad (12)$$

در غیر این صورت: $v_i = \delta_i$

ه) شرط بهینگی: شرط بهینگی مورد استفاده در روش پیشنهادی، شرط بهینگی پارتو است (Sawaragi, 1985) بدین معنا که یک جواب موجه برای مساله، یک جواب بهینه خواهد بود اگر هیچ جواب دیگری بدون بدتر کردن یکی از اهداف، هدف دیگر را بهبود نبخشد.

۶- گامهای الگوریتم پیشنهادی

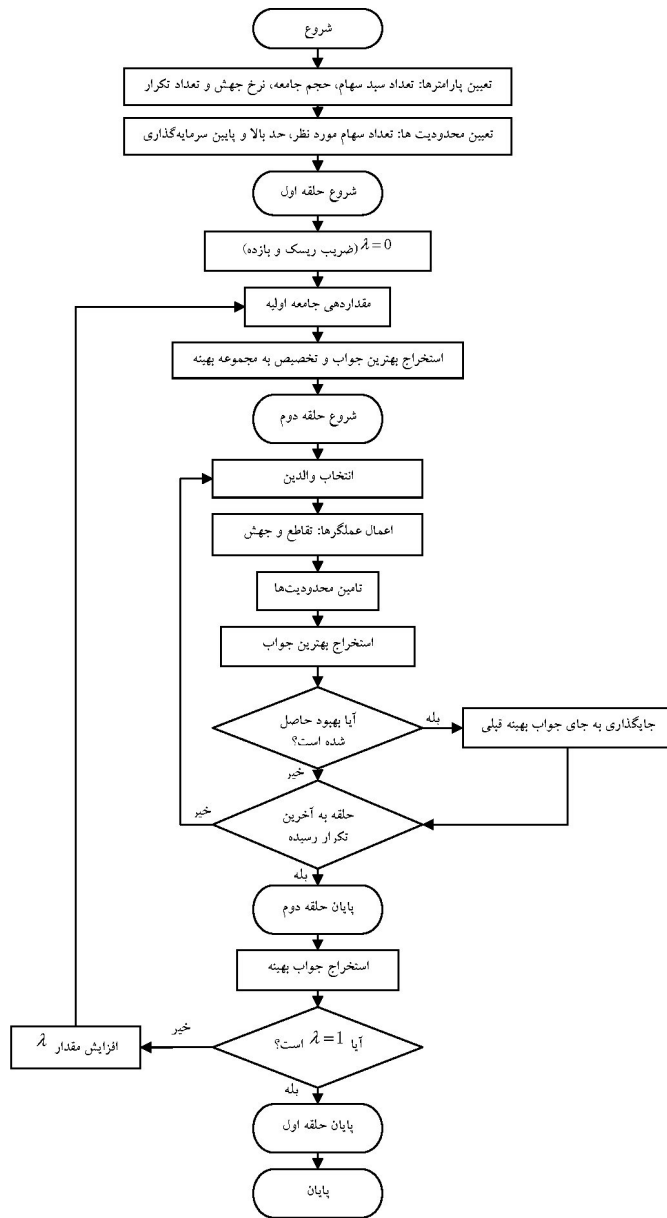
با توجه به موارد فوق، الگوریتم پیشنهادی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

۱- تعیین تعداد پورتفولیو، حجم جامعه، نرخ جهش و تکرار الگوریتم ژنتیک، ۲- تعیین تعداد سهم مورد نظر، حدود بالا و پایین سرمایه‌گذاری، ۳- شروع الگوریتم، ۴- ایجاد و مقداردهی اولیه جامعه با توجه به حجم و تعداد سهام مورد نظر، ۵- تأمین محدودیت‌ها، ۶- ارزیابی بهترین جواب و تخصیص آن به مجموعه بهینه‌ها، ۷- شروع الگوریتم ژنتیک و مقداردهی μ ، ۸- انتخاب والدین، ۹- تقاطع، ۱۰- تأمین محدودیت‌ها، ۱۱- ارزیابی بهترین جواب حاصله و مقایسه آن با بهترین جواب موجود، ۱۲- جهش، ۱۳- تأمین محدودیت‌ها، ۱۴- ارزیابی بهترین جواب حاصله و مقایسه آن با بهترین جواب موجود، ۱۵- پایان حلقه، ۱۶- استخراج جواب بهینه در سطح μ و افزایش μ ، ۱۷- پایان حلقه.

در نمودار شماره ۲ نیز فلوجارت مدل پیشنهادی قید شده است. همان‌گونه که در فلوجارت شکل ۲ نشان داده شده است، مدل پیشنهادی با تعیین تعداد سید سهم در مرز کارا و پارامترهای الگوریتم ژنتیک (تعداد جامعه، نرخ جهش و تعداد تکرار) آغاز می‌گردد. پس از این مرحله، محدودیت‌های مورد نظر سرمایه‌گذار مانند تعداد سهام مورد درخواست (محدودیت شماره ۸) و حدود بالا و پایین سرمایه‌گذاری در هر سهم (محدودیت شماره ۹) مشخص شده و در سطوح مختلف ریسک و بازده (از طریق مقدار μ)، الگوریتم ژنتیک پیشنهادی اقدام به بهینه‌سازی مساله می‌نماید. نهایتاً مرز کارا تحت محدودیت‌های اعمال شده به دست می‌آید.

نکته قابل توجه آن است که شکل خاص کروموزوم‌ها (شکل شماره ۱) تأمین‌کننده محدودیت شماره ۸ است و محدودیت‌های شماره ۷ و ۹ با استفاده از نرمال کردن وزن‌ها و فرمول‌های ۱۱ و ۱۲ تأمین می‌گردند.

نمودار ۲. فلوچارت الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله انتخاب سبد سهام مقید



۷- آزمون مدل

جهت آزمودن مدل، از دو نمونه سهام ۵۰ تایی به صورت مستقل استفاده شده است. نمونه اول که از این قسمت به بعد به عنوان نمونه خارجی نام گذاری می شود، مشتمل بر ۵۰ سهم شرکتهای خارجی است که از پایگاه اطلاعاتی مرکز پولی ام اس ان^۱ استخراج شده است. این ۵۰ سهم، سهام شرکتهایی است که توسط پایگاه ارتباطی مذکور به عنوان ۵۰ شرکت برتر در سال ۲۰۰۶ انتخاب گردیده اند. عنوان شرکتهای مذکور در جدول شماره ۱ ضمیمه قید شده است.

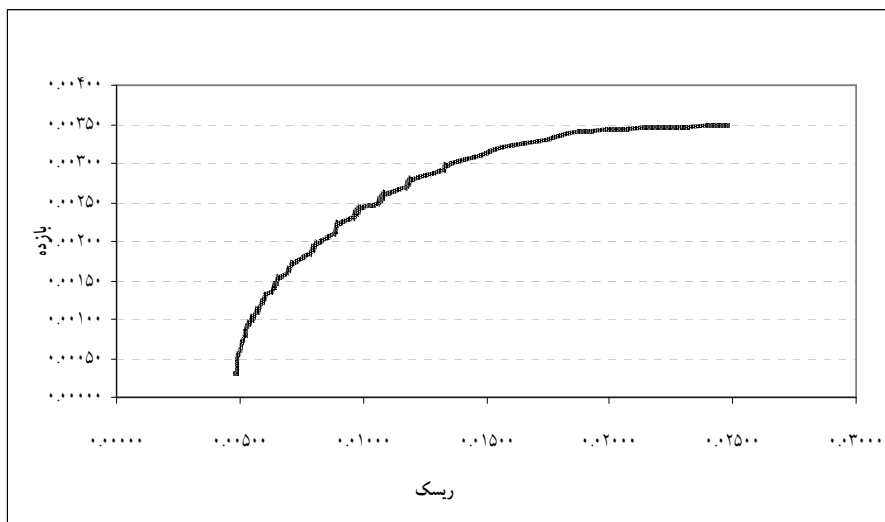
اطلاعاتی که در مقاله حاضر مورد استفاده قرار گرفت، مشتمل بر قیمت روزانه این ۵۰ سهم در طی سال ۲۰۰۶ میلادی است. این قیمتها با استفاده از فرمول ۱۳ به بازده روزانه تبدیل می شود:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (13)$$

در فرمول فوق، R_t بازده سهام در دوره t ، P_t قیمت سهم در دوره t و P_{t-1} قیمت سهم در دوره ماقبل است. این فرمول درصد بازده سرمایه را محاسبه می نماید. لازم به ذکر است که برای استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، می توان از بازده ماهانه یا سالانه نیز استفاده نمود با این شرط که سری زمانی به اندازه کافی برای محاسبه ماتریس کوواریانسها و تخمین بازده مورد انتظار وجود داشته باشد. از سوی دیگر می توان عوامل دیگری مانند سهام جایزه، حق خرید و ... را نیز در محاسبه بازده تاریخی مورد مدنظر قرار داد و الگوریتم پیشنهادی در آن شرایط نیز اقدام به حل مساله می نماید. در هر صورت به دلیل سهولت محاسبه و در دسترس بودن اطلاعات قیمتی، از این فرمول برای مدل پیشنهادی استفاده شده است.

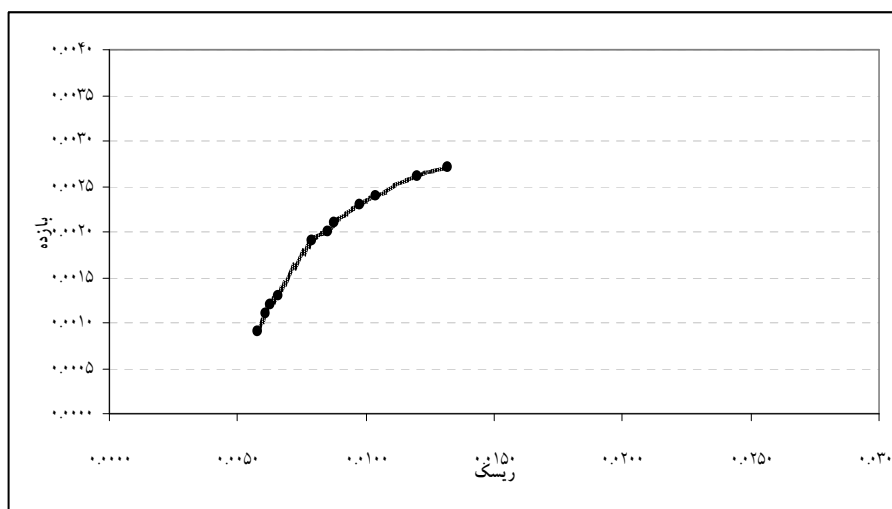
در گام نخست پس از محاسبه بازده مورد انتظار و ماتریس کوواریانسها، مساله به صورت نامقید به وسیله برنامه ریزی کوآدراتیک حل می گردد. مرز کارای محاسبه شده به صورت نمودار شماره ۳ است.

نمودار ۳. مرز کارای نمونه خارجی بدون محدودیت با استفاده از QP

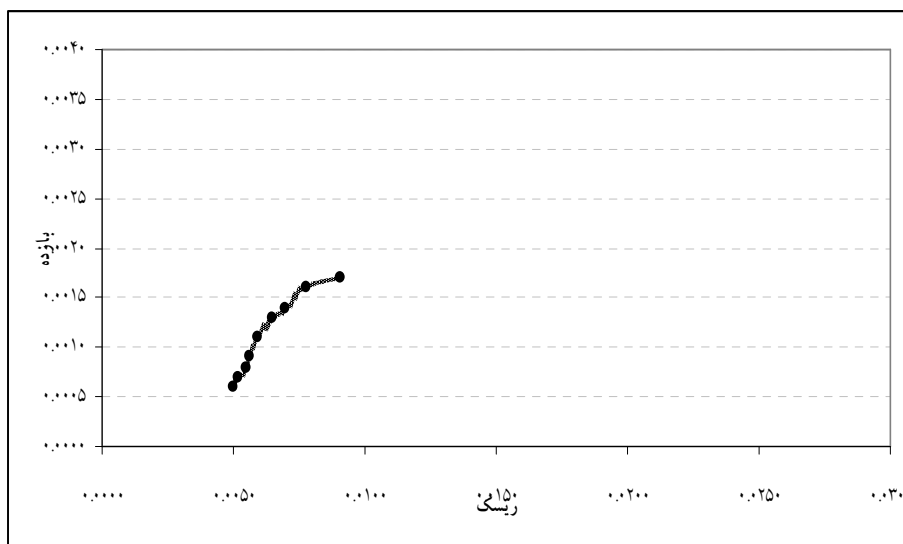


پس از این مرحله، از الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای حل مساله مقید استفاده می‌شود. بدین صورت که یک بار با محدودیت انتخاب ۱۰ سهم از ۵۰ سهم، یک بار با محدودیت ۲۰ سهم از ۵۰ سهم و یک بار با محدودیت ۴۰ سهم از ۵۰ سهم، مساله حل شده است. نمودارهای ۴ الی ۶ نشان‌دهنده مرزهای کارای حاصله است.

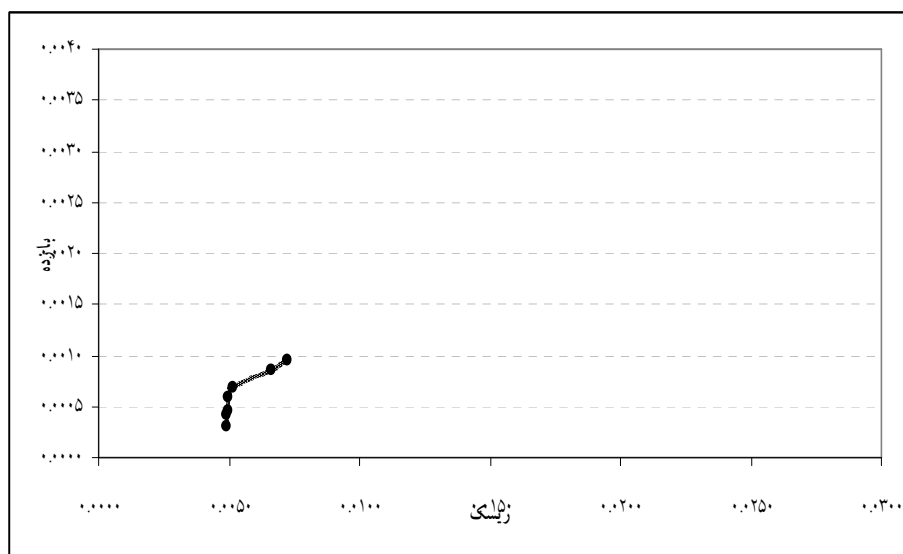
نمودار ۴. مرز کارای نمونه خارجی با محدودیت ۱۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



نمودار ۵. مرز کارای نمونه خارجی با محدودیت ۲۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



نمودار ۶. مرز کارای نمونه خارجی با محدودیت ۴۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



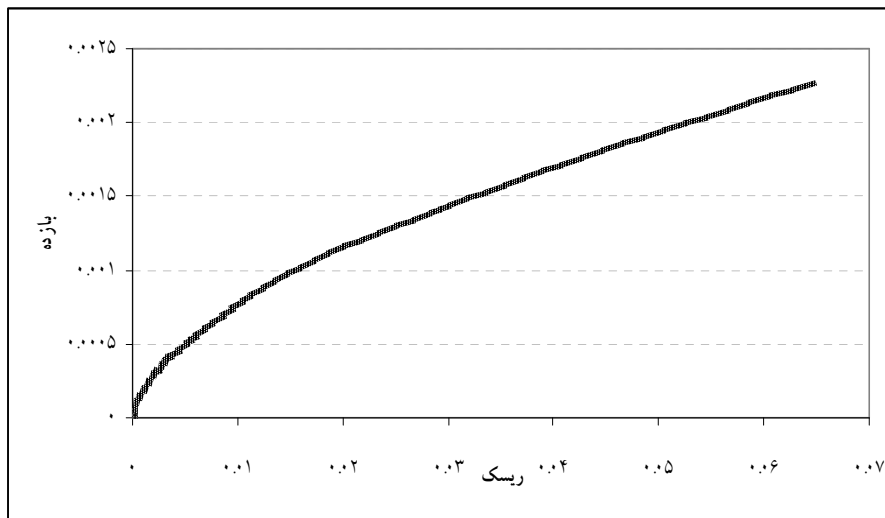
همان‌گونه که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، مرز کارای به دست آمده به‌صورت نقاط گسسته می‌باشد که این مساله به‌دلیل ناموجه بودن برخی از ترکیبها با وجود محدودیت‌های عدد صحیح تعداد سهام است.

نمودار ۴ که نشان‌دهنده انتخاب ۱۰ سهم از ۵۰ سهم است، بیشتر نقاط میانی و بالای مرز کارایی را نگاشت نموده است. این امر به‌دلیل وجود محدودیت انتخاب ۱۰ سهم از ۵۰ سهم است که موجب تنوع کمتری شده و در نتیجه سطوح بالاتر ریسک و بازده را به خود اختصاص می‌دهد. از سوی دیگر به هر میزان که تعداد سهام در محدودیت عدد صحیح بیشتر شود، نگاشت متمایل به سمت پایین یعنی ترکیبهای ریسک و بازده، کمتر خواهد شد؛ به‌طوری که در محدودیت ۴۰ سهم از ۵۰ سهم فقط ۷ سبد سهام در یال پایین مرز کارا حاصل شده است.

جهت آزمون مدل در بازار بورس اوراق بهادار تهران نیز اطلاعات قیمتی ۵۰ شرکت برتر بورس در سال ۱۳۸۵ مورد استفاده قرار گرفته که اسامی این ۵۰ شرکت در جدول شماره ۲ ضمیمه آمده است. با استفاده از فرمول ۱۳، اطلاعات قیمت سهام به سری زمانی بازده سهام تبدیل شده است. در اینجا نیز لازم به یادآوری است که از اطلاعات بازده روزانه، ماهانه و یا سالانه نیز برای استفاده در مدل پیشنهادی می‌توان سود جست. نکته مهم دیگر آن است که مدل پیشنهادی اقدام به برقراری رابطه بین ریسک و بازده در حالت وجود محدودیت‌های عدد صحیح می‌نماید و بنابراین از اطلاعات سهم هر شرکتی برای یافتن مرز کارایی می‌توان استفاده کرد و مدل، حساسیتی به نوع شرکت ندارد.

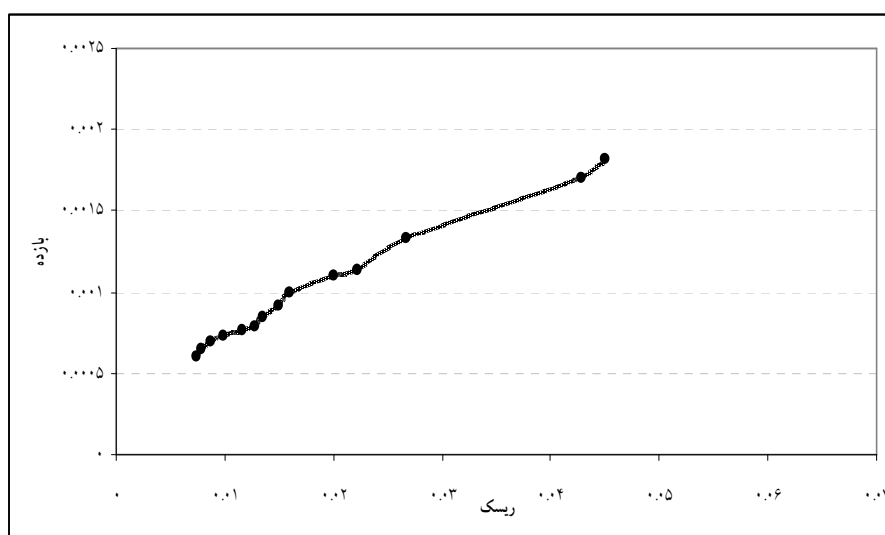
پس از محاسبه بازده مورد انتظار و ماتریس کوواریانس‌های ۵۰ سهم فوق، در گام نخست اقدام به محاسبه مرز کارایی به‌صورت نامقید، با استفاده از برنامه‌ریزی کوآدراتیک می‌شود که نتیجه در نمودار ۷ آمده است.

نمودار ۷. مرز کارای نمونه داخلی بدون محدودیت با استفاده از QP

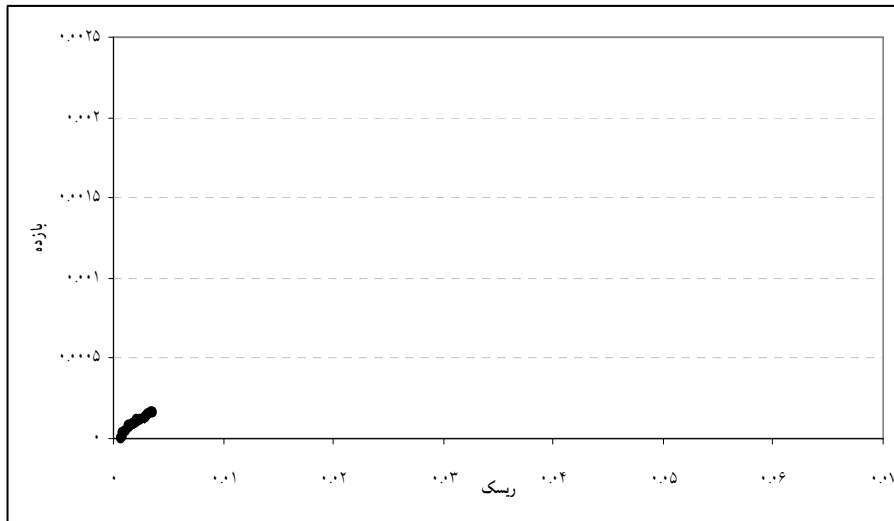


در این مرحله نیز مانند نمونه خارجی از الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای حل مساله مقید در نمونه داخلی استفاده می‌شود. مانند قبل یک بار با محدودیت انتخاب ۱۰ سهم از ۵۰ سهم، یک بار با محدودیت ۲۰ سهم از ۵۰ سهم و یک بار با محدودیت ۴۰ سهم از ۵۰ سهم، مساله بهینه‌سازی می‌شود. نمودارهای ۸ الی ۱۰ نمایانگر رهگیری مرز کارای مقید با محدودیت‌های فوق می‌باشند.

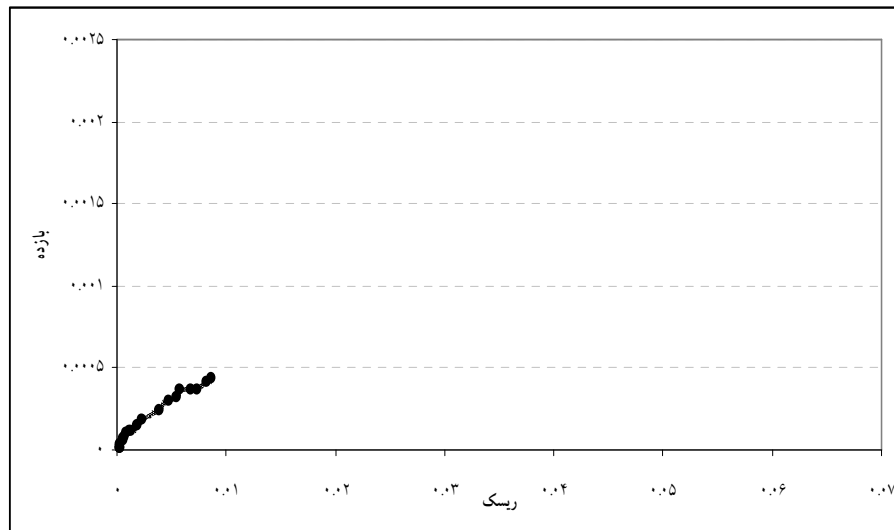
نمودار ۸. مرز کارای نمونه داخلی با محدودیت ۱۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



نمودار ۹. مرز کارای نمونه داخلی با محدودیت ۲۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



نمودار ۱۰. مرز کارای نمونه داخلی با محدودیت ۴۰ سهم از ۵۰ سهم، با استفاده از مدل پیشنهادی



همان‌طور که نمودارهای فوق نشان می‌دهند، در نمونه داخلی نیز مدل پیشنهادی توانسته است بهینه‌سازی مقید نماید. در اینجا هم هنگامی که تعداد سهام مورد نظر کم است، نقاط یافته‌شده سبدهای سهام، با ریسک و بازده بالاتر است و بیشتر در مرکز و بالای مرز کارا قرار دارند (نمودار ۸). به موازات بیشتر شدن تعداد سهام، نقاط به یال پایین مرز کارا یعنی منطقه‌ای که ریسک و بازده کمتری دارد، متمایل می‌شوند (نمودارهای ۹ و ۱۰). در اینجا نیز همان‌طور که انتظار می‌رفت به علت ناپیوستگی فضای جستجو و اثر محدودیت شماره (۸)، مرز کارا به صورت گسسته است. بنابراین نوع نمونه تأثیری بر گسسته بودن این مرز نخواهد داشت.

تنها تفاوت نمونه داخلی با نمونه خارجی، شکل منحنی مرز کارا و شیب آن می‌باشد. این امر به دلیل تفاوت ماهیتی دو نمونه است؛ زیرا از سویی در هر نمونه‌ای چه داخلی و چه خارجی با توجه به ترکیب سهام، روابط ریسک و بازده متفاوت می‌باشد که این امر مستقیماً بر شکل منحنی مرز کارا تأثیر می‌گذارد (زیرا منحنی مرز کارا نمایانگر رابطه ریسک و بازده می‌باشد). از سوی دیگر در طی دوره مورد بررسی، سهمهای داخلی عموماً از بازده کم و ریسک زیاد برخوردار بوده‌اند، این امر نیز خود موجب جابه‌جایی مرز کارا گردیده است. به هر حال به دلیل آنکه مدل ارائه‌شده بر پایه روابط ریاضی بنا نهاده شده و مستقل از نمونه^۱ می‌باشد، لذا در هر نمونه مورد نظر اقدام به رهگیری یا شناسایی مرز کارای مقید می‌نماید؛ یعنی در منطقه موجه^۲ نسبت به شناسایی نقطه بهینه اقدام می‌نماید.

با مقایسه مرز کارای نامقید در هر دو نمونه (نمودارهای ۳ و ۷) با مرزهای یافته‌شده از مساله مقید در نمونه‌های داخلی و خارجی (نمودارهای ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ و ۱۰)، استنباط می‌شود که در تمام مراحل، مدل پیشنهادی توانسته است در منطقه موجه مساله را بهینه نموده و حتی هنگامی که محدودیت‌ها اجازه داده‌اند، نقاط روی مرز کارای اصلی را بیابد. این امر نشان‌دهنده توان الگوریتم پیشنهادی در حل مساله سبد سهام مقید با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد صحیح است.

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این تحقیق مدل میانگین واریانس مارکوویتز مقید، تحت محدودیت عدد صحیح مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مدلی برای حل آن پیشنهاد گردید. مدل ارائه‌شده در دو نمونه کاملاً مستقل مورد آزمون قرار گرفته و توانست با وجود سطوح مختلف محدودیت تعداد سهام مورد نظر، به‌طور کارایی نسبت به حل مساله اقدام نماید.

همان‌گونه که اشاره شد هر چه تعداد سهام مورد نظر سرمایه‌گذار بیشتر می‌شود، متنوع‌سازی بیشتری صورت گرفته و در نتیجه سبد سهام حاصله دارای ریسک و بازده کمتری خواهد بود. از سوی دیگر با در نظر گرفتن تعداد سهام کمتر، تنوع سبد سهام نیز کمتر شده و ریسک و بازده بیشتر می‌شود.

وجود محدودیت عدد صحیح تعداد سهام، یعنی سهامی که سرمایه‌گذار مایل است در سبد سهام مورد نظرش وجود داشته باشد، حل مدل را به تصمیمات واقعی سرمایه‌گذاری نزدیک‌تر می‌سازد. از این رو مدل ارائه‌شده می‌تواند در تصمیمات سرمایه‌گذاری به‌صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین، سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به کارایی مدل، با مشخص نمودن تعداد سهام مورد نظر خود، اقدام به تشکیل سبدهای سهام کارا در سطوح مختلف ریسک و بازده نماید. بدیهی است این امر می‌تواند هزینه‌های سرمایه‌گذاری را با پایین آوردن هزینه معاملات به شکل چشمگیری کاهش دهد؛ زیرا همان‌گونه که اشاره گردید، در سطوح مختلف ریسک و بازده، تعداد سهام مورد نظر برای معامله توسط خود سرمایه‌گذار تعیین می‌گردد.

جهت انجام تحقیقات آتی پیشنهاد می‌گردد، از مدل‌های موجود ارزیابی و اندازه‌گیری ریسک (مانند معیار 1VaR) جهت مقایسه عملکرد مدل‌ها و تعیین مرز کارایی حاصله استفاده شود. همچنین می‌توان مساله مذکور را با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری دیگری نظیر الگوریتم بهینه‌سازی مورچگان^۲، تکامل همزمان^۳ و یا شبکه‌های عصبی حل و نتایج حاصله را با مدل پیشنهادی در این مقاله مقایسه نمود. از سوی دیگر پیشنهاد می‌شود با مقایسه نتایج حاصل از اجرای مدل پیشنهادی با سهام ۵۰ شرکت برتر معرفی شده از سوی سازمان بورس اوراق بهادار تهران در سال‌های مختلف، نسبت به تجزیه و تحلیل شباهت‌ها و تفاوت‌ها اقدام گردد.

فهرست منابع

- Arnove, S., Loraschi, A. & Tettamanzi, A. (1993) A Genetic Approach to Portfolio Selection; *Neural Network World*, 6, 597-604.
- Bienstock, D. (1995) Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems; In Balas, E. & Clausen, J. Editors. *Integer Programming and Combinatorial Optimization*; 4th International IPCO Conference, Copenhagen; Denmark. (May 1995) Proceedings, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 920, Berlin: Springer.
- Bienstock, D. (1996) Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems; *Mathematical Programming* 74, 121-40.
- Borchers B. & Mitchell, J.E. (1994) An Improved Branch and Bound Algorithm for Mixed Integer Nonlinear Programs; *Computers & Operations Research* 21, 359-67.
- Borchers, B. & Mitchell, J. E. (1997) A Computational Comparison of Branch and Bound and Outer Approximation Algorithms for 0-1 Mixed Integer Nonlinear Programs, *Computers & Operations Research*, 24, 699-701.
- Dahl H., Meeraus, A. & Zenios, S.A. (1993) *Some Financial Optimization Models: Risk Management*; Financial Optimization, 3-36 Cambridge: Cambridge University Press.
- Elton, E.J. & Gruber, M.J. (1995) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*; John Wiley.
- Fernandez, A. & Gomez, S. (2007) *Portfolio Selection Using Neural Networks*, *Computers & Operations Research*.
- Floudas, C.A. (1995) *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and Applications*; Oxford: Oxford university Press.
- Goldberg, D. E. & Deb, K. (1991) *A Comparative Analysis of Selection Schemes Used in Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann.
- Grupe, F.H. & Jooste, S. (2004) *Genetic Algorithms: A Business Perspective*; *Information Management & Computer Security*, Vol. 12, No. 3, 289-298.
- Hansen, P. & Jaumard, B. & Mathon, V. (1993) *Constrained Nonlinear 0-1 Programming*; *ORSA Journal on Computing*, 5, 97-119.
- Holland, J. H. (1975) *Adaptation in Natural and Artificial Systems*; University of Michigan Press.

- Kellerer, H., Mansini, R. & Speranza, M.G. (2000) On Selecting a Portfolio With Fixed Costs and Minimum Transaction Lots, *Annals of Operation Research*, 287-304.
- Loraschi, A., Tettamanzi, A., Tomassini, M. & Verda, P. (1995) Distributed Genetic Algorithms with an Application to Portfolio Selection Problems; In: Pearson DW, Steele NC, Albrecht RF, Editors, *Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms*, pp. 384-87.
- Mansini, R. & Speranza, M.G. (1999) Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots; *European Journal of Operational Research* Vol.114.P.219-233.
- Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection; *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Markowitz, H. (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*; John Wiley.
- Mitchel, M. (1999) *An Introduction to Genetic Algorithms*; MIT Press.
- Oh, K. J., Kim, T. Y. & Min, S. (2005) Using Genetic Algorithm to Support Portfolio Optimization for Index Fund Management; *Expert Systems with Applications* 28 , pp. 371–379.
- Rudd, A. & Rosenberg, B. (1979) Realistic Portfolio Optimization; *TIMS Studies in the Management Sciences*, 11:21-46.
- Sawaragi, Y., Nakayama, H. & Tanino, T. (1985) Theory of Multi Objective Optimization; In: Bellman, R. Editor, *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 176. NewYork: Academic Press Inc.
- Smith, K. (1999) Neural Networks for Combinatorial Optimization: a Review of More than a Decade of Research; *INFORMS Journal on Computing* 11:15–34.
- Speranza, M.G. (1996) A Heuristic Algorithm for a Portfolio Optimization Model Applied to the Milan Stock Market; *Computers & Operations Research* 23, 433-41.
- www.irbourse.com, 3/12/1385
- www.moneycentral.msn.com, 50 Top Rated Company

ضمیمه

جدول ۱. نمونه ۵۰ شرکت برتر خارجی

Apple Inc	Cisco Systems Inc	Investors Financial Services	Pepsico Inc	UnitedHealthcare Gp Incorp
Amer Intl Group	CSX Corp	Intel Corp	Procter & Gamble Co	Wachovia Corp
Applied Materials Inc	ChevronTexaco Cp	JP Morgan Chase & Co	Qualcomm Inc	Wells Fargo & Co
Applied Micro Circuits Corp	Disney (Walt) Productions	Kroger Co (The)	Companhia Vale D	Waste Management Inc
AMERICA MOVIL SA DE CV ADS L	Directv	Level 3 Communications Inc	Staples Inc	Xilinx Inc
Bank of America Corp	Duke Energy Corp	Mattel Co	Sun Microsystems	Yahoo! Inc
Brocade Comms	Goldman Sachs Group Inc	Microsoft Corp	AT&T	General Motors
Citigroup Inc	Hudson City Bancorp Inc. - Ot	Newmont Mining Cp	Triad Hospitals Inc	General Electric Co
Comcast Cp Spl Class A	Home Depot	Nokia Corp ADR Cl A	Taiwan Semiconductor Mnf Ltd	GOOGLE INC CL A
Caremark Rx	Hewlett-Packard Co	On Semiconductor Corp	Time Warner Inc	Wal-Mart Stores Inc

مأخذ: MSN Money Central

جدول ۲. ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار در سال ۱۳۸۵

شرکت صنایع جوشکاب یزد	ملی سرب و روی ایران	کارخانه فارسیت درود	پارس خودرو	سرمایه گذاری سپه
سرمایه گذاری گروه صنایع بهشهر ایران	فراآورده‌های نسوز آذر	پتروشیمی اراک	زامیاد	لیزینگ ایران
سرمایه گذاری صنعت نفت	توسعه معادن روی ایران	نفت بهران	سایپا	موتوزن
شرکت سرمایه گذاری صنعت و معدن	توسعه صنایع بهشهر	تجهیز نیروی زنگان	الکتربیک خودرو شرق	شرکت گاز لوله
سرمایه گذاری غدیر	سرمایه گذاری صنعت بیمه	تولید سموم علف کش	صنعتی دریایی ایران	تراکتورسازی ایران
کابل‌های مخابراتی شهید فندی	بانک پارسیان	صنایع آذراب	سایپا دیزل	تولید تجهیزات سنگین هیپکو
سرمایه گذاری توسعه معادن و فلزات	سرمایه گذاری پتروشیمی	ماشین سازی اراک	ایران خودرو	تکنو تار
سرمایه گذاری صندوق بازنشستگی کشوری	سرمایه گذاری توسعه شهری توس گستر	کالسیمین	محورسازان ایران خودرو	سرمایه گذاری مسکن
بانک اقتصاد نوین	سرمایه گذاری توسعه صنعتی ایران	آلومتک	پارس دارو	ایران خودرو دیزل
سرمایه گذاری ملی ایران	سرمایه گذاری ساختمان ایران	صنایع مس شهید باهنر	سیمان تهران	گروه بهمن

مأخذ: IRBOURSE